

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Инженерный институт

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ №5, 6

35.03.06 *Агроинженерия*

профили:

Технические системы в агробизнесе

Технический сервис в АПК

Электрооборудование и электротехнологии в АПК

23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*

профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство

Новосибирск 2020

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №5, 6 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов, С.Н.Бурков, М.В.Грунина, А.В.Попов. – Новосибирск, 2020. – 30 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия (профили: Технические системы в агробизнесе; Технический сервис в АПК; Электрооборудование и электротехнологии); 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство).

Содержание

1. Введение.....	4
2. Методические указания по выполнению контрольных работ	6
3. Контрольная работа №5.....	8
4. Контрольная работа №6.....	10
5. Примеры решения задач контрольных работ	16
6. Вопросы к экзамену	27
7. Литература	29

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Внешние требования к освоению дисциплины регламентируются ФГОС ВО по направлению подготовки **35.03.06 *Агроинженерия***, профили ***Технические системы в агробизнесе, Электрооборудование и электротехнологии в агропромышленном комплексе, Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, Технический сервис в агропромышленном комплексе (Б1.Б.6 Математика)***, в части отнесения ее к базовой части блока дисциплин.

Внутренние требования определяются видами и задачами профессиональной деятельности и формируемыми компетенциями. Основной вид профессиональной деятельности: ***производственно-технологический*** (дополнительного вида деятельности нет), тип образовательной программы: ***прикладной бакалавриат***.

Дисциплина Б.2.Б.6 Математика относится к базовой части ***математического и естественнонаучного цикла***.

Изучение дисциплины «Математика» базируется на знаниях, умениях и компетенциях, полученных в ходе освоения школьных курсов «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия». Базирующиеся дисциплины: «Информатика», «Теоретическая механика».

1.3. Требования к результатам освоения дисциплины

Дисциплина *Математика* в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих общекультурных (ОК), общепрофессиональных (ОПК) компетенций бакалавра: **ОК-7**, **ОПК-2**.

Общекультурные компетенции (ОК):

– способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

– способностью к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности (ОПК-2);

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики ;

– основные понятия и методы математического анализа;

– дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно**. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы**, то она **не будет зачтена**.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ ва- ри- анта	Номера задач контрольных работ по вариантам									
	Контрольная работа №5					Контрольная работа №6				
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3. Контрольная работа №5

В задачах 1–10 найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

2. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$.

3. $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

4. $(x-y)dx + xdy = 0$.

5. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

6. $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

7. $x\left(y' + e^{y/x}\right) = y$.

8. $y' = \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

9. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

20. $xy' = 8x^2 + y^2$.

В задачах 11–20 найти решение задачи Коши.

11. $y' - y \cos x = x e^{\sin x}$; $y(0) = 1$.

12. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$; $y(0) = 0$.

13. $y' - 2y = x^2 e^{2x}$; $y(0) = \frac{1}{3}$.

14. $y' + y \sin x = e^{\cos x}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

15. $y' - \frac{y}{x} = 1$; $y(1) = 5$.

16. $y' + \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = \frac{5}{4}$.

17. $y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$; $y(1) = 3$.

18. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$; $y(1) = 1$.

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$; $y(1) = \frac{3}{2}$.

$$20. y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2}; \quad y(-1) = 1.$$

В задачах **21-30** найти общее решение дифференциального уравнения.

$$21. y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2.$$

$$22. y'' - y' - 6y = 5e^{3x}.$$

$$23. y'' + 2y' - 8y = 3\sin x.$$

$$24. y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2.$$

$$25. y'' - y' - 2y = 3e^{2x}.$$

$$26. y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3.$$

$$27. y'' - 2y' + y = 2e^{-2x}.$$

$$28. y'' + 14y' + 49y = 6e^{-7x}.$$

$$29. y'' + y' - 12y = 14e^{3x}.$$

$$30. y'' + 16y = 7\cos 2x.$$

В задачах **31-40** дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n k \sqrt[n]{n}}$. Написать первые

четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала. Числа a , b и k даны.

$$31. a = 2, \quad b = 3, \quad k = 4.$$

$$32. a = 6, \quad b = 5, \quad k = 3.$$

$$33. a = 3, \quad b = 4, \quad k = 5.$$

$$34. a = 5, \quad b = 2, \quad k = 4.$$

$$35. a = 4, \quad b = 3, \quad k = 3.$$

$$36. a = 2, \quad b = 3, \quad k = 5.$$

$$37. a = 5, \quad b = 6, \quad k = 2.$$

$$38. a = 3, \quad b = 5, \quad k = 6.$$

$$39. a = 3, \quad b = 7, \quad k = 3.$$

$$40. a = 2, \quad b = 7, \quad k = 3.$$

В задачах **41-50** найти четыре члена разложения функции в ряд Маклорена.

$$41. \frac{9}{20 - x - x^2}.$$

$$42. \sqrt[4]{16 - 5x}.$$

$$43. \ln(1 - x - 6x^2).$$

$$44. (2 - e^x)^2.$$

$$45. \frac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}.$$

$$46. \frac{3}{2 - x - x^2}.$$

$$47. (x - 1)\sin 5x.$$

$$48. \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}.$$

$$49. \frac{6}{8 + 2x - x^2}.$$

$$50. \frac{7}{12 + x - x^2}.$$

3. Контрольная работа №6

51. В коробке 15 луковиц гладиолусов, из которых 7 луковиц красных гладиолусов, 8 луковиц черных. Какова вероятность того, что из 10 наудачу выбранных луковиц 6 окажутся луковицами черных гладиолусов?

52. Из 12 луковиц, среди которых 5 луковиц красных тюльпанов и 7 желтых, наудачу выбирают 4. Какова вероятность того, что из них вырастут два красных и два желтых тюльпана?

53. В помете 2 рыжих щенка и 5 черных. Наудачу выбирают трех щенков. Какова вероятность того, что один из них рыжий?

54. Из 12 крыс 8 получили некоторую дозу облучения. Какова вероятность того, что из 6 наудачу выбранных крыс 4 облучены?

55. В популяции из 30 плодовых мушек 10 имеют красные глаза. Наудачу выбирают 5 мушек. Какова вероятность того, что одна из них имеет красные глаза?

56. В 15 пакетиках находится пыльца, собранная с 15 цветков гороха, из которых 5 красных, а остальные – белые. Наудачу выбирают 3 пакетика. Какова вероятность того, что в двух из них пыльца красных цветков?

57. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?

58. Из данных 20 мужчин 1 страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что при случайном выборе 10 мужчин из этих 20 один страдает дальтонизмом?

59. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?

60. Из 15 вакцинированных мышей у 12 сформировался иммунитет. Какова вероятность того, что из 5 случайно выбранных из группы вакцинированных мышей 4 имеют иммунитет?

В задачах **61-70** Известно, что рост людей, проживающих в данной местности, есть случайная величина X , распределенная по нормальному закону со средним значением a и средним квадратическим отклонением σ . Найти: а) вероятность того, что наудачу выбранный человек имеет рост от x_1 до x_2 см; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше δ ; в) по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого роста человека.

Номер задачи	a	σ	x_1	x_2	δ
61	170	5	160	180	7
62	170	6	165	185	10
63	170	7	160	185	10
64	165	7	155	175	6
65	165	6	150	170	8
66	165	5	160	175	9
67	175	7	165	175	5
68	175	6	160	180	9
69	175	5	165	185	4
70	175	8	170	180	15

В задачах **71-80** задан закон распределения дискретной случайной величины .

Найти:

- 1) значение параметра a ;
- 2) математическое ожидание $M(X)$;
- 3) дисперсию $D(X)$.

Построить многоугольник распределения.

71.

X	25	27	28	30	31
p	0,3	0,2	0,3	0,1	a

72.

23	24	26	27	X	30
a	0,2	0,4	0,3	p	0,1

73.

X	17	18	20	23	24
p	0,2	0,1	0,5	0,1	a

74.

X	12	14	16	19	20
p	0,1	0,4	a	0,3	0,1

75.

X	32	34	35	36	38
p	0,1	0,2	0,5	0,1	a

76.

X	35	36	38	40	42
p	0,1	0,4	0,2	0,1	a

77.

X	40	41	43	45	46
p	0,2	0,4	a	0,3	0,1

78.

X	51	52	54	55	57
p	0,2	0,3	0,1	0,3	a

79.

X	46	49	50	51	55
p	0,2	0,3	a	0,3	0,1

80.

X	18	19	20	21	23
p	0,3	0,3	a	0,1	0,2

В задачах **81-90** случайная величина X задана функцией распределения. Требуется:

1) найти функцию плотности вероятности $f(x)$;

2) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ;

3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$81. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$82. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$83. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$84. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x, & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$85. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$86. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 4, \\ \frac{1}{2}x - 2, & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$$87. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ x-2, & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$88. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & \text{при } -1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$89. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1/2, \\ 2x-1, & \text{при } 1/2 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$90. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1, \\ x+1, & \text{при } -1 < x \leq 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

В задачах **91–100** закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей. Найти:

- 1) частные законы распределения случайных величин X и Y ;
- 2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
- 3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
- 4) корреляционный момент C_{xy} ;
- 5) коэффициент корреляции r_{xy} ;
- 6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

91.

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0,1	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1

92.

$Y \backslash X$	2	3	4
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,2

1	0,2	0,1	0
---	-----	-----	---

1	0,1	0	0
---	-----	---	---

93.

$Y \backslash X$	-3	0	1
-1	0	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

94.

$Y \backslash X$	-3	-2	0
1	0,1	0,2	0,2
2	0,1	0,1	0,1
3	0	0	0,2

95.

$Y \backslash X$	0	2	3
-2	0,1	0,1	0
1	0,2	0,2	0,1
0	0,1	0,1	0,1

96.

$Y \backslash X$	-3	0	2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1

97.

$Y \backslash X$	-3	2	4
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,
1	0,2	0,2	0

98.

$Y \backslash X$	0	3	4
-2	0,2	0,1	0
-1	0,2	0,1	0,1
0	0,1	0,1	0,1

99.

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

100.

$Y \backslash X$	0	2	4
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0,1	0,1	0

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y' = y(x + y)$.

Решение. Выразим из уравнения y' : $y' = \frac{y}{x^2}(x + y)$,

$y' = \frac{y}{x} \left(\frac{x + y}{x} \right)$, $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \frac{y}{x} \right)$. Получили однородное уравнение. Дела-

ем замену $t = \frac{y}{x}$, $y = tx$, $y' = t'x + t$: $t'x + t = t(1 + t)$, $t'x = t^2$, $x dt = t^2 dx$

– уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{t} = \ln |x| + C$. Возвращаясь к старой переменной y , полу-

чаем: $-\frac{x}{y} = \ln |x| + C$.

Ответ: $-\frac{x}{y} = \ln |x| + C$.

Пример 2. Найти решение задачи Коши $xy' + y = \cos x$, $y(\pi) = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x : $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$.

Получили линейное уравнение.

Решаем уравнение: $y' + \frac{y}{x} = 0$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$; $\ln |y| = -\ln |x| + C$.

Пользуясь свойствами логарифма, получаем $y = \frac{C_1}{x}$. (Мы ввели

новую константу C_1 , связанную со старой следующим образом: $C = \ln C_1$). Считая C_1 функцией от x , подставляем в полученное линей-

ное уравнение $y = \frac{C_1}{x}$ и $y' = \frac{C_1'x - C_1}{x^2}$: $\frac{C_1'x - C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x}$,

$$\frac{C_1'}{x} - \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x^2} = \frac{\cos x}{x}.$$

Отсюда находим $C_1' = \cos x$, $C_1 = \sin x + B$, где B – константа.

Используя начальные условия, найдём константу B .

$$0 = \frac{\sin \pi + B}{\pi}, \quad 0 = \frac{0 + B}{\pi}, \quad B = 0.$$

Ответ: $y = \frac{\sin x}{x}$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y'' - y = 4e^x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

Решение. Дано ЛНДУ II порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Решение уравнения ищем в виде

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$$

а) Найдём $y_{\text{оо}}$: $y'' - y = 0$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$; $k_1 = 1; k_2 = -1$.

Значит $y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

б) $y_{\text{чн}}$ ищем, используя метод неопределённых коэффициентов

$$y_{\text{чн}} = Ae^x x, \quad y'_{\text{чн}} = Ae^x x + Ae^x, \quad y''_{\text{чн}} = Ae^x x + 2Ae^x.$$

Подставив $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем

$$Ae^x x + 2Ae^x - Ae^x x = 4e^x$$

$$2Ae^x = 4e^x$$

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

$$y_{\text{чп}} = 2xe^x$$

$$y_{\text{он}} = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2xe^x$$

Чтобы найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, продифференцируем $y_{\text{он}}$

$$y'_{\text{он}} = C_1e^x - C_2e^{-x} + 2e^x + 2xe^x \quad y_{\text{оо}} \quad y_{\text{чп}}$$

Подставим в $y_{\text{он}}$ и $y'_{\text{он}}$ вместо $x = 0$, $y_{\text{он}} = 0$, $y'_{\text{он}} = 1$.

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + 2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = \frac{1}{2}$$

Подставим найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y_{\text{он}}$: $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x$.

Пример 4. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}}$. Написать первые

четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение: $a_n = \frac{8^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}}$, $x_0 = 0$.

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{7^{n+1} \sqrt[3]{n+2}}{8^{n+1}} = \frac{7}{8}$$

Интервал сходимости: $(x_0 - R; x_0 + R) = \left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right)$

Рассмотрим концы интервала:

при $x = \frac{7}{8}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(\frac{7}{8}\right)^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{3} < 1$, следовательно (по признаку сравнения) ряд рас-

ходится.

при $x = -\frac{7}{8}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(-\frac{7}{8}\right)^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$, это знакочередующийся ряд. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}, \text{ т.е. } |a_n| > |a_{n+1}|.$$

Условия выполнены, значит ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится при $x \in \left[-\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right)$.

Пример 5. Найти четыре члена разложения функции $y = \ln(10+x)$ в ряд Маклорена.

Решение. Используем известное разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \text{ область сходимости } -1 < x \leq 1.$$

Итак:

$$\begin{aligned} \ln(10+x) &= \ln\left(10\left(1+\frac{x}{10}\right)\right) = \ln 10 + \ln\left(1+\frac{x}{10}\right) = \\ &= \ln 10 + \frac{x}{10} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 10^2} - \frac{x^4}{4 \cdot 10^2} + \dots, \end{aligned}$$

область сходимости $-1 < \frac{x}{10} \leq 1, -10 < x \leq 10$.

Пример 6. В группе 18 студентов из которых, из которых 8 имеют задолженность по математическому анализу. Какова вероятность того, что из 10 произвольно выбранных студентов 3 человек имеют задолженность?

Решение. Такие задачи описываются общей схемой. Имеется совокупность из N_1 элементов первого вида и N_2 элементов второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности из k элементов она состоит из k_1 элементов первого вида и k_2 элементов

второго вида, где $k = k_1 + k_2$, $k_1 \leq N_1$, $k_2 \leq N_2$.

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{k_1} \cdot C_{N_2}^{k_2}}{C_{N_1+N_2}^{k_1+k_2}}.$$

$$p = \frac{C_8^3 C_{10}^5}{C_{18}^{10}} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{10!8!}{18!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{784}{2431} \approx 0,3225.$$

Пример 7. Предполагаем, что рост призывника – нормально распределенная случайная величина X , с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ . В специальную команду нужно отобрать призывников ростом от x_1 до x_2 сантиметров. Определить: а) вероятность того, что наудачу взятый призывник попадёт в специальную команду; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше δ ; в) по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого роста призывника.

a	σ	x_1	x_2	δ
180	10	160	180	7

Решение. а) Для нормально распределённой случайной величины

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{180 - 180}{10}\right) - \Phi\left(\frac{160 - 180}{10}\right) =$$

$$= \Phi(0) + \Phi(2) = 0 + 0,4772 = 0,4772.$$

$$\text{б) } P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi(0,7) = 2 \cdot 0,2580 = 0,516$$

с) По правилу трёх сигм наименьшая граница $a - 3\sigma$, наибольшая

$a + 3\sigma$. Таким образом, $180 \pm 3 \cdot 10 = 180 \pm 30$.

Наименьшая граница 150 см, наибольшая 210 см.

Пример 8. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Найти:

- 1) значение параметра a ;
- 2) математическое ожидание $M(X)$;
- 3) дисперсию $D(X)$.

Построить многоугольник распределения.

X	3	6	8	14	31
p	0,2	0,1	0,3	0,2	a

Решение.

$$1) \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

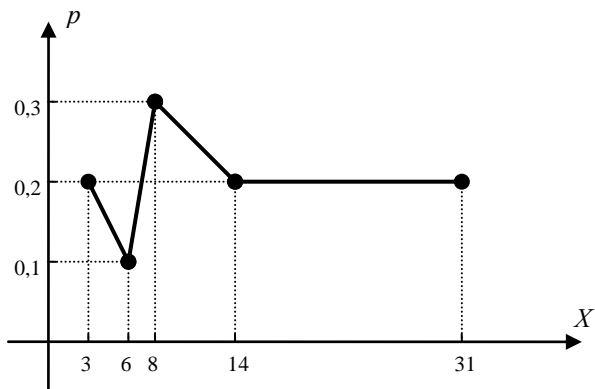
$$0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + a = 1,$$

$$a = 0,2.$$

$$2) M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 = 3 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,2 + 31 \cdot 0,2 = 0,6 + 0,6 + 2,4 + 2,8 + 6,2 = 12,6.$$

$$3) D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 3^2 \cdot 0,2 + 6^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,3 + 14^2 \cdot 0,2 + 31^2 \cdot 0,2 - 12,6^2 = 97,24.$$

4) многоугольник распределения:



Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}, & 0 < x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) найти функцию плотности вероятности $f(x)$;
- 2) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ;
- 3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение:

$$1) f(x) = F'(x), \quad 0' = 1' = 0, \quad \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} \right)' = \frac{2x}{12} + \frac{1}{3} = \frac{x+2}{6}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{6}(x+2), & 0 < x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$2) \text{ Найдём } M(X) \text{ по формуле } M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

$$M(X) = \frac{1}{6} \int_0^2 x(x+2) dx = \frac{1}{6} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{9}.$$

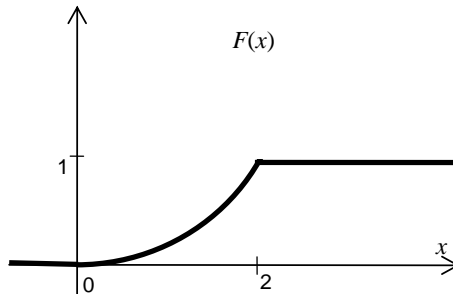
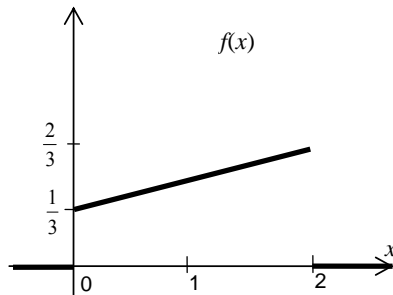
Дисперсию вычисляем по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X);$$

$$M(X^2) = \frac{1}{6} \int_0^2 x^2(x+2) dx = \frac{1}{6} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{14}{9};$$

$$D(X) = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9} \right)^2 = \frac{26}{81}.$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.



Пример 10. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей.

	Y			
		1	2	3
X				
1		1/18	1/12	1/36

2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Найти:

- 1) частные законы распределения случайных величин X и Y ;
- 2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
- 3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
- 4) корреляционный момент C_{xy} ;
- 5) коэффициент корреляции r_{xy} ;
- 6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

Решение:

- 1) частный закон распределения случайной величины X :

$$P(X = 1) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

проверка: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$, верно.

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

- частный закон распределения случайной величины Y :

$$P(Y = 1) = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(Y = 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y = 3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

проверка: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$, верно.

y_i	1	2	3
p_i	1/3	1/2	1/6

2) Математические ожидания случайных величин X и Y :

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}; \quad M(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

3) Дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$:

$$D(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9},$$

$$D(Y) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}.$$

4) Корреляционный момент C_{xy} :

$$C_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y),$$

$$M(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{18} +$$
$$+ 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{77}{18},$$

$$C_{xy} = \frac{77}{18} - \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{6} = 0.$$

5) коэффициент корреляции $r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, где $\sigma_x = \sqrt{M(X)}$,

$\sigma_y = \sqrt{M(Y)}$ – среднеквадратические отклонения.

Так как у нас $C_{xy} = 0$, то и $r_{xy} = 0$.

6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

Наименьшее значение $Y = 1$, при этом $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

По формуле $P(X = x_i | Y = 1) = \frac{P(X = x_i; Y = 1)}{P(Y = 1)}$ находим:

$$P(X = 1 | Y = 1) = \frac{1}{18} : \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 2 | Y = 1) = \frac{1}{9} : \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 3 | Y = 1) = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Условный закон распределения

$x_i Y = 1$	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

5. Вопросы к экзамену

1. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним, линейные, Бернулли.
2. Уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Определитель Вронского. Свойства линейных однородных уравнений.
4. Структура общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
5. Неоднородное линейное уравнение второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
6. Частное решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Ряды. Свойства рядов. Необходимый признак сходимости.
8. Расходимость гармонического ряда.
9. Признаки Даламбера, Коши, сравнения, интегральный признак Коши.
10. Признак Лейбница.
11. Свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.
12. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
13. Классическое и геометрическое определения вероятности. Свойство вероятности.
14. Теоремы сложения и умножения.
15. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез. Формулы Байеса
16. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.
17. Теорема Муавра - Лапласа; интегральная теорема Лапласа
18. Операции над СВ.
19. Свойства $M(X)$, $D(X)$. Формулы для вычисления $D(X)$.
20. Одинаково распределенные взаимнонезависимые СВ.
21. Начальные и центральные теоретические моменты.
22. Биномиальное распределение, распределение Пуассона их числовые характеристики.
23. Функция распределения, ее свойства.
24. Плотность распределения вероятностей, ее свойства
25. Числовые характеристики непрерывных СВ

26. Равномерное, нормальное, показательное распределения, их числовые характеристики.
27. Кривая Гаусса.
28. Неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.

Список основной литературы

1. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 479 с.
2. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Список дополнительной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, Т.1, - М.: Интеграл –Пресс, 2006
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, Т.2 , - М.: Интеграл –Пресс, 2006

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ №№5,6

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Попов Александр Владимирович

Подписано к печати “__” _____ 201_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,88 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160