

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

ИНСТИТУТ ЗАОЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ №№1,2

35.03.06 *Агроинженерия*

профили:

Технические системы в агробизнесе

Технологическое оборудование для хранения и переработки
с/х продукции

Технический сервис в АПК

Электрооборудование и электротехнологии в АПК

Новосибирск 2020

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№1,2 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов, С.Н.Бурков, М.В.Грунина, А.В.Попов. – Новосибирск, 2020. – 23 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия (профили: Машины и оборудование в агробизнесе; Технологическое оборудование для хранения и переработки с/х продукции; Технический сервис в АПК; Электрооборудование и электротехнологии в АПК)

Утверждены методической комиссией Института заочного образования и повышения квалификации.

Ответственный за выпуск куратор по инженерным направлениям подготовки
Е.В.Агафонова.

Содержание

1. Введение.....	4
2. Методические указания по выполнению контрольных работ	6
3. Контрольная работа №1	8
4. Контрольная работа №2.....	10
5. Примеры решения задач контрольных работ	13
6. Вопросы к экзамену	21
7. Литература	22

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Внешние требования к освоению дисциплины регламентируются ФГОС ВО по направлению подготовки **35.03.06 *Агроинженерия***, профили ***Технические системы в агробизнесе, Электрооборудование и электротехнологии в агропромышленном комплексе, Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, Технический сервис в агропромышленном комплексе (Б1.Б.6 Математика)***, в части отнесения ее к базовой части блока дисциплин.

Внутренние требования определяются видами и задачами профессиональной деятельности и формируемыми компетенциями. Основной вид профессиональной деятельности: ***производственно-технологический*** (дополнительного вида деятельности нет), тип образовательной программы: ***прикладной бакалавриат***.

Дисциплина Б.2.Б.6 Математика относится к базовой части *математического и естественнонаучного цикла*.

Изучение дисциплины «Математика» базируется на знаниях, умениях и компетенциях, полученных в ходе освоения школьных курсов «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия». Базирующиеся дисциплины: «Информатика», «Теоретическая механика».

1.3. Требования к результатам освоения дисциплины

Дисциплина *Математика* в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих общекультурных (ОК), общепрофессиональных (ОПК) компетенций бакалавра: **ОК-7**, **ОПК-2**.

Общекультурные компетенции (ОК):

– способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

– способностью к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности (ОПК-2);

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики ;

– основные понятия и методы математического анализа;

– дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно**. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы**, то она **не будет зачтена**.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ ва- ри- анта	Номера задач контрольных работ по вариантам									
	Контрольная работа №1					Контрольная работа №2				
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3. Контрольная работа №1

В задачах **1-10** найти $P(A)$.

1. $P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $P(A) = A^2 - 3A^{-1} + 2 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $P(A) = A^2 - 4A^{-1} + 5 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $P(A) = A^2 + 5A^{-1} - 2 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $P(A) = A^2 - 6A^{-1} + | A | E$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $P(A) = A^2 + 2A^{-1} - 8 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $P(A) = A^2 - 7A^{-1} - 2 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $P(A) = A^2 + 4A^{-1} - 5 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $P(A) = A^2 - 5A^{-1} + 2 | A | E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах **11-20** найти определитель.

11. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$14. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 6 \\ 2 & -2 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 4 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

В задачах **21–30** систему уравнений решить методом Гаусса.

$$21. \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = -4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x + y - 2z = 4 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ 2x - y - 2z = 8 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 3x + y - 3z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + 3z = -4 \\ 3x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = -9, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 5x - 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$$

В задачах **31-40** даны векторы \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 . Найти:

a) $\cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$;

b) $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$;

с) объём пирамиды, построенной на векторах \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 .

31. $\bar{a}_1(2; 1; 2), \bar{a}_2(-1, 2, 4), \bar{a}_3(-2, 4, 4)$

32. $\bar{a}_1(2; 2; 1), \bar{a}_2(1, -4, -2), \bar{a}_3(4, -2, 4)$

33. $\bar{a}_1(1; 2; 2), \bar{a}_2(2, 4, -1), \bar{a}_3(4, 4, -2)$

34. $\bar{a}_1(2; 1; 2), \bar{a}_2(-1, 2, 4), \bar{a}_3(-2, 4, 4)$

35. $\bar{a}_1(2; -1; 2), \bar{a}_2(-1; 2; -4), \bar{a}_3(4; 2; 4)$

36. $\bar{a}_1(2; 1; -2), \bar{a}_2(1; 2; -4), \bar{a}_3(4; 4; 2)$

37. $\bar{a}_1(-2; -1; 2), \bar{a}_2(1; 2; -4), \bar{a}_3(-4; -4; -2)$

38. $\bar{a}_1(2; -1; -2), \bar{a}_2(-1; 2; 4), \bar{a}_3(-4; -4; 2)$

39. $\bar{a}_1(-2; 1; -2), \bar{a}_2(1; -2; 4), \bar{a}_3(-4; 4; -2)$

40. $\bar{a}_1(-2; -1; -2), \bar{a}_2(1; 2; 4), \bar{a}_3(4; -4; -2)$

В задачах **41-50** даны координаты вершин треугольника ABC . Сделать чертёж и найти уравнение высоты AD и уравнение медианы CM .

41. $A(8; -1); B(-8; 11); C(-1; -13)$

42. $A(-10; 5); B(6; -7); C(-1; 17)$

43. $A(10; -4); B(-6; 8); C(1; -16)$

44. $A(3; 2); B(-13; -10); C(-6; 14)$

45. $A(7; 4); B(-9; -8); C(-2; 16)$

46. $A(7; 3); B(-9; -9); C(-2; 15)$

47. $A(-13; 3); B(3; -9); C(-4; 15)$

48. $A(12; -2); B(-4; -14); C(3; 10)$

49. $A(7; 5); B(-9; -7); C(-2; 17)$

50. $A(13; 7); B(-3; -5); C(4; 19)$

4. Контрольная работа №2

В задачах **51-60** определить тип кривой второго порядка, найти координаты фокусов и записать уравнения директрис, вычислить эксцентриситет. Сделать чертёж.

51. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.
52. $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.
53. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.
54. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.
55. $144x^2 + 169y^2 - 24336 = 0$.
56. $25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0$.
57. $25x^2 - 144y^2 - 3600 = 0$.
58. $144x^2 - 25y^2 - 3600 = 0$.
59. $64x^2 - 36y^2 - 2304 = 0$.
60. $36x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$.

В задачах **61-70** найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .

61. $M_1(-6; 8; 5), M_2(6; -12; 10), M_3(9; -4; -5)$.
62. $M_1(-6; 6; 4), M_2(4; 3; -4), M_3(-2; 3; 2)$.
63. $M_1(-6; 3; 6), M_2(4; -6; 2), M_3(2; -3; 2)$.
64. $M_1(6; -6; 0), M_2(-4; 3; 4), M_3(4; 6; -6)$.
65. $M_1(2; 9; -6), M_2(-2; 3; 2), M_3(-4; 15; -4)$.
66. $M_1(4; 6; -6), M_2(2; 3; -2), M_3(4; 9; -8)$.
67. $M_1(-9; 6; 2), M_2(9; -6; 2), M_3(3; -4; 4)$.
68. $M_1(6; 4; -6), M_2(6; -6; 4), M_3(-9; 4; 4)$.
69. $M_1(-6; 8; -2), M_2(-6; -2; 8), M_3(-3; -2; 6)$.
70. $M_1(6; -4; 2), M_2(3; -4; 4), M_3(-6; 2; 4)$.

В задачах **71-80** даны точки A_1, A_2, A_3 . Найти уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2 .

71. $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7)$.
72. $A_1(4; 4; 10), A_2(4; 10; 2), A_3(2; 8; 4)$.
73. $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10)$.
74. $A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4), A_3(5; 10; 4)$.
75. $A_1(10; 6; 6), A_2(-2; 8; 2), A_3(6; 8; 9)$.
76. $A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6), A_3(5; 7; 4)$.
77. $A_1(6; 6; 5), A_2(4; 9; 5), A_3(4; 6; 11)$.
78. $A_1(7; 2; 2), A_2(5; 7; 7), A_3(5; 3; 1)$.

79. $A_1(8; 6; 4), A_2(10; 5; 5), A_3(5; 6; 8)$.

80. $A_1(7; 7; 3), A_2(6; 5; 8), A_3(3; 5; 8)$.

В задачах **81-100** найти пределы функций

$$81. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$$

$$83. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$$

$$85. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x + 4}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}$$

$$89. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$91. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$$

$$93. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$$

$$95. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}$$

$$97. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}$$

$$99. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}$$

$$82. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$$

$$86. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$$

$$88. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}$$

$$90. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}$$

$$92. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$$

$$94. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}$$

$$96. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$$

$$100. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$$

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти $P(A)$.

$$P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу ищем по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

$$|A| = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11, \quad A_{11} = 3, \quad A_{12} = -4, \quad A_{21} = 2, \quad A_{22} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} + 3 \cdot 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{280}{11} & -\frac{92}{11} \\ \frac{184}{11} & \frac{372}{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Сначала, используя свойства определителя, проведём несколько преобразований:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{к первой строке} \\ \text{прибавим третью} \\ \text{строку, умножен-} \\ \text{ную на } (-3). \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 & -14 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{ко второй строке} \\ \text{прибавим третью} \\ \text{строку} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 & -14 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{к 4-ой строке} \\ \text{прибавим 3-ю} \\ \text{строку, умножен-} \\ \text{ную на } (-2). \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 & -14 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

Целью проведённых преобразований было получить нули в первом столбце. Далее разложим определитель по первому столбику.

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & -10 & -14 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -10 & -14 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & -7 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} 8 & -10 & -14 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

Теперь воспользуемся правилом треугольников (Саррюса).

$$\begin{vmatrix} 8 & -10 & -14 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 8 \cdot 7 \cdot (-7) + (-10) \cdot 3 \cdot 3 + (-14) \cdot 1 \cdot (-3) - (-14) \cdot 7 \cdot 3 -$$

$$-(-10) \cdot 1 \cdot (-7) - 8 \cdot 3 \cdot (-3) = -392 - 90 + 42 + 294 - 70 + 72 = -144.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -144.$

Пример 3. Систему уравнений решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-2)(-3) \\ (-2)(-3) \\ (-2)(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (-2) \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array} \right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-4) \\ \leftarrow \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 58 & 116 \end{array} \right) : 58 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (18)(-3) \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ (2) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 4. Даны векторы $\bar{a}_1(-1, 2, -2)$, $\bar{a}_2(2, -2, 1)$, $\bar{a}_3(3, -4, 2)$.

Найти:

a) $\cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$;

b) $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$;

с) объём пирамиды, построенной на векторах \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3 .

Решение.

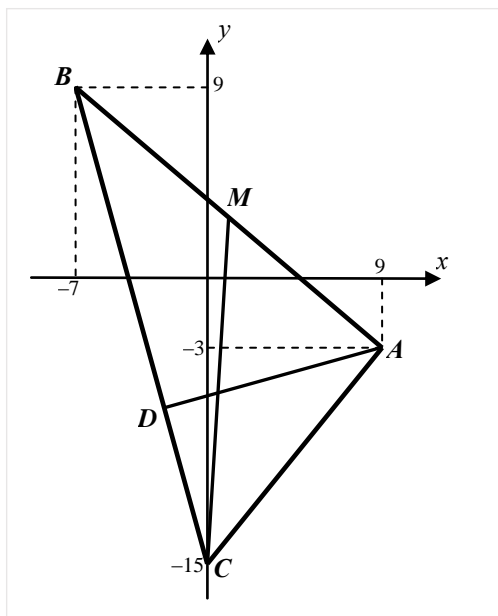
$$\text{a) } \cos(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{(-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{8}{9};$$

$$\text{b) } \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} - 4\bar{k} + \bar{j} - 4\bar{i} = -2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k};$$

$$\text{c) } V = \frac{1}{6} \cdot |\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |4 + 6 + 16 - 12 - 8 - 4| = \frac{1}{3}.$$

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника ABC . Сделать чертёж и найти уравнение высоты AD и уравнение медианы CM .
 $A(9; -3)$; $B(-7; 9)$; $C(0; -15)$

Решение.



$$\overline{BC} = \{x_C - x_B, y_C - y_B\} = \{0 - (-7), -15 - 9\} = \{7, -24\}.$$

Высота AD проходит через точку A и перпендикулярна стороне BC . Используем уравнение прямой через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$: $a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) = 0$.

$$AD: 7(x - 9) - 24(y + 3) = 0, \quad 7x - 63 - 24y - 72 = 0, \quad 7x - 24y - 135 = 0.$$

Точка M – середина стороны AB . Её координаты:

$$M_x = \frac{A_x + B_x}{2} = \frac{9 - 7}{2} = 1, \quad M_y = \frac{A_y + B_y}{2} = \frac{-3 + 9}{2} = 3, \quad M(1, 3).$$

Уравнение прямой через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

$$CM: \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y + 15}{3 + 15}, \quad x = \frac{y + 15}{18}, \quad 18x = y + 15, \quad 18x - y - 15 = 0.$$

Ответ: $AD: 7x - 24y - 135 = 0$. $CM: 18x - y - 15 = 0$.

Пример 6. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением, найти координаты фокусов и записать уравнения директрис, вычислить эксцентриситет. Сделать чертёж.

Решение: Преобразуем уравнение кривой к каноническому ви-

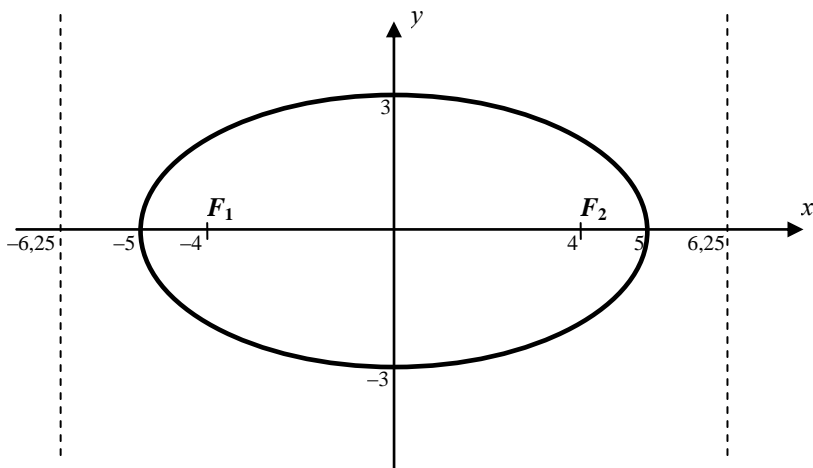
ду: $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$, $9x^2 + 25y^2 = 225$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Это уравнение эллипса с центром в начале координат. Полуоси: $a = 5$,

$b = 3$. Ищем координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Фокусы: $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$. Дирек-

триссы: $x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{5}{0,8} = -6,25$ и $x = 6,25$.



Пример 7. Найти объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .

$M_1(-6; 8; 5), M_2(4; 3; -4), M_3(2; -3; 2)$.

Решение: Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

У нас

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-8 & z-5 \\ 4+6 & 3-8 & -4-5 \\ 2+6 & -3-8 & 2-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+6 & y-8 & z-5 \\ 10 & -5 & -9 \\ 8 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$15(x+6) - 72(y-8) - 110(z-5) + 40(z-5) + 30(y-8) - 99(x+6) = 0,$$

$$-84(x+6) - 42(y-8) - 70(z-5) = 0,$$

$$6(x+6) + 3(y-8) + 5(z-5) = 0,$$

$$6x + 36 + 3y - 24 + 5z - 25 = 0,$$

$$6x + 3y + 5z - 13 = 0,$$

Запишем уравнение этой плоскости в отрезках

$$6x + 3y + 5z = 13, \quad \frac{6x}{13} + \frac{3y}{13} + \frac{5z}{13} = 1, \quad \frac{x}{13/6} + \frac{y}{13/3} + \frac{z}{13/5} = 1.$$

Плоскость отсекает на координатных осях отрезки длиной $\frac{13}{6}$, $\frac{13}{3}$ и

$\frac{13}{5}$ соответственно. Тогда объём пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{6} \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{13}{5} = \frac{2197}{540} \approx 4,07.$$

Пример 8. Даны точки $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(4; 10; 2)$, $A_3(2; 10; 10)$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2 .

Решение: $\overline{A_1A_2} = \{4 - 4, 10 - 2, 2 - 5\} = \{0, 8, -3\}$.

Уравнение искомой прямой: $\frac{x-2}{0} = \frac{y-10}{8} = \frac{z-10}{-3}$.

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 4x + 17}{2x^2 + 9x - 3}$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 4x + 17}{2x^2 + 9x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(8 - \frac{4}{x} + \frac{17}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{9}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{8}{2} = 4.$$

Пример 10. Найти $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x - 7}$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 6x - 7} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-3)}{(x-7)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-3)}{(x+1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

5. Вопросы к экзамену

1. Система линейных уравнений. Метод Гаусса
2. Определители второго и третьего порядка. Разложение определителя по строке и столбцу.
3. Свойства определителей.
4. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
5. Действия над матрицами.
6. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Линейные операции над векторами.
9. Теорема о максимальном числе линейно-независимых векторов в системе. Базис.
10. Правила сложения векторов. Проекция векторов, их свойства.
11. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Их свойства.
12. Основные теоремы о пределах функции.
13. Теоремы о бесконечно малых.
14. Замечательные пределы.
15. Свойства непрерывных функций.
16. Непрерывность основных элементарных функций.
17. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
18. Правила дифференцирования.
19. Производные основных элементарных функций.
20. Связь дифференциала и производной.
21. Свойства дифференциала.
22. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши,
23. Правило Лопиталья.
24. Необходимое и достаточное условие возрастания функции на отрезке.
25. Необходимое условие существования экстремума.
26. Достаточные условия существования экстремума.
27. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции на отрезке.
28. Достаточное условие существования точки перегиба.

Список основной литературы

1. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 479 с.
2. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Список дополнительной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, Т.1, - М.: Интеграл –Пресс, 2006
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, Т.2, - М.: Интеграл –Пресс, 2006

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ №№1,2

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Попов Александр Владимирович

Подписано к печати “__” _____ 201_ г. Формат 84×108/32
Объем 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160